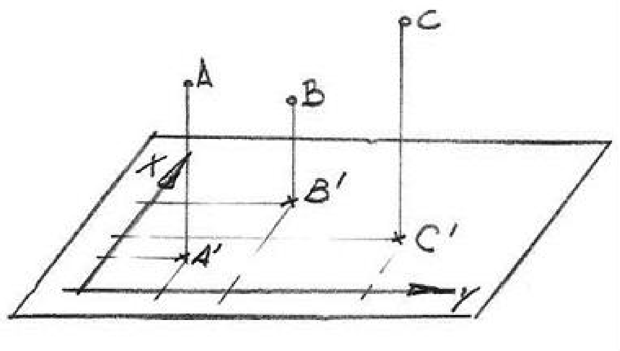
CAPÍTULO 4
Métodos planimétricos

Sebastián I. Besteiro y Héctor A. Salgado

La **Planimetría** aborda la determinación de la posición relativa de las proyecciones de los puntos del terreno (A; B; C) sobre un plano horizontal de referencia (A'; B'; C'), sobre el cual se proyectan los mismos (Figura 4.1).

Figura 4.1: Planimetría



Comprende los métodos aplicables para la determinación de las coordenadas planas (X; Y) de los puntos.

Métodos basados en medición de ángulos

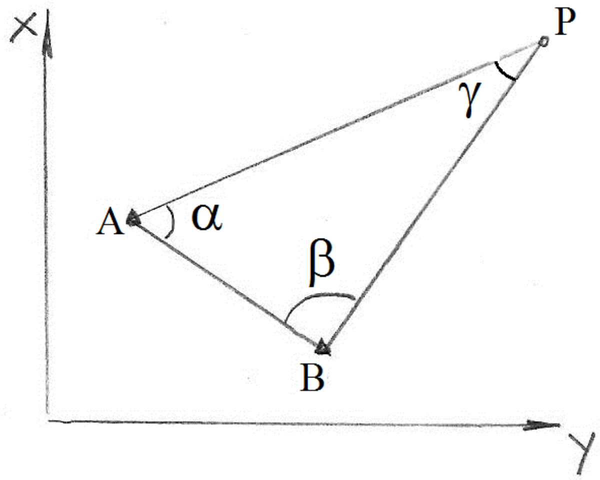
Son aquellos procedimientos, en los cuales, a partir de puntos con coordenadas planas conocidas y de medición de ángulos horizontales, se determinan las coordenadas del punto incógnita (P). Son empleados para densificar la red de puntos de apoyo de levantamientos topográficos, control de proyectos de manejo de suelos y aguas, sistematización para sistemas de control de erosión hídrica, riego gravitacional, parquización y obras de paisajismo, etc.

Intersección directa

Son datos las coordenadas de 2 puntos (A y B); se miden 2 ángulos (α y β). Mediante cálculos trigonométricos se determinan las coordenadas del punto incógnita "P" (Figura 4.2)

DATOS: X_A; Y_A X_B; Y_B MEDICIONES: α ; β RESULTADO: X_P; Y_P

Figura 4.2: Intersección Directa o "Hacia Adelante"



- **Cálculo de la distancia AB**:

$$\overline{AB} = \sqrt{\Delta x^2 + \Lambda y^2}$$

donde $\Delta x = x_B - x_A$ y $\Delta y = y_B - y_A$

- **Cálculo de azimutes**:

Azimut A→B: $Az_{A \to B} = \text{arc tg } (\Delta y / \Delta x)$

Azimut B→A: $Az_{B \to A} = Az_{A \to B} \pm 180°$

- **Cálculo de ángulo** γ:

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$$

- **Aplicando el Teorema del Seno**:

$$\frac{\overline{BP}}{sen\alpha} = \frac{\overline{AP}}{sen\beta} = \frac{\overline{AB}}{sen\gamma}$$

Por consiguiente

$$\overline{AP} = \overline{AB}.\frac{sen\beta}{sen\gamma}$$

Cálculo del azimut Az_{AP} → $Az_{AP} = Az_{AB} - \alpha$

Con Az_{AP} y AP se calculan las coordenadas de P:

$$\boxed{X_P = X_A + AP \,.\, \cos Az_{AP}}$$

$$\boxed{Y_P = Y_A + AP \,.\, \text{sen}\, Az_{AP}}$$

Del mismo modo, se pueden calcular las coordenadas Xp y Yp a partir del Punto B, debiendo obtenerse el mismo resultado, si se consideran suficientes cifras decimales para las funciones trigonométricas.

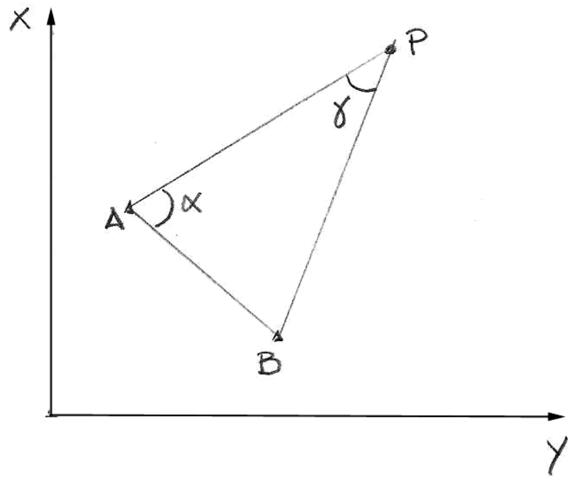
Aplicación: cuando se dispone de 2 puntos dato, en los cuales se puede hacer estación con un goniómetro (por ej. teodolito), y dirigir visuales hacia el punto P, que puede ser inaccesible (por ej. cruz de iglesia, mástil de monumento, palo o señal de embarcación, etc.)

Intersección lateral

Los datos son los mismos que en el caso anterior (A y B), pero aquí uno de los ángulos medidos corresponde al vértice incógnita (P) En la Figura 4.3 se indican datos y medidas:

DATOS: X_A; Y_A X_B; Y_B MEDICIONES: α ; γ RESULTADO: X_P; Y_P

Figura 4.3: Intersección Lateral



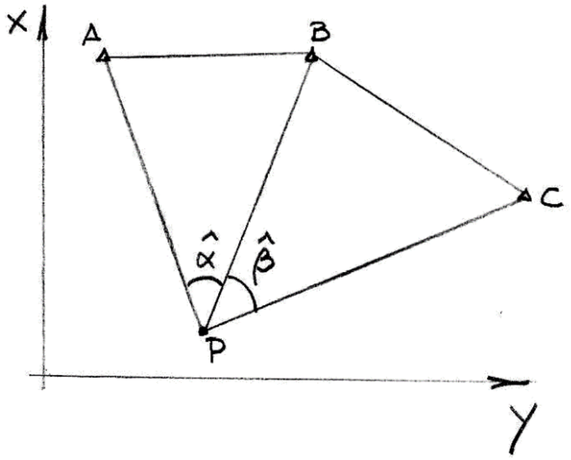
Aplicación: cuando uno de los puntos Dato es inaccesible, por ejemplo, una antena, torre de molino, poste de luz o teléfono, etc.).

Intersección inversa (o Problema de *Pothenot*)

En este método se requieren las coordenadas de 3 puntos dato (A, B, C), y la medición de 2 ángulos (α ; β), tomados desde el punto incógnita (P) (Figura 4.4)

DATOS: X_A; Y_A X_B; Y_B X_C; Y_C MEDICIONES: α ; β RESULTADO: X_P; Y_P

Figura 4.4: Intersección Inversa o Pothenot



Aplicación: para determinar coordenadas mediante una sola estación de goniómetro, en la cual se miden los 2 ángulos formados hacia los 3 puntos de coordenadas conocidas. Usado para posicionarse en un campo, contando con la visual a 3 puntos Dato (por ej. vértices esquineros, en los cuales se levantaron señales con banderas).

Métodos basados en la medición de distancias

Se fundamentan en la determinación de las coordenadas del punto (P) a partir de mediciones lineales solamente. En la actualidad han tomado mayor difusión debido al importante desarrollo tecnológico en materia de distanciómetros electrónicos, de gran precisión en la medición de distancias, lo cual permite el cálculo de las coordenadas del punto P de modo rápido y preciso.

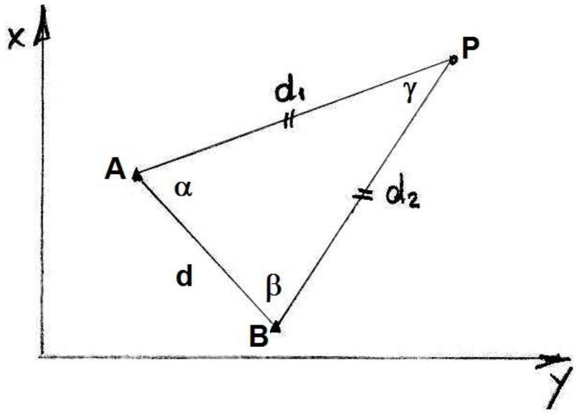
La clave está en la medición de lados de polígonos, los cuales se resuelven con procedimientos trigonométricos. El caso más frecuente es la formación de triángulos, llamado **trilateración.**

Trilateración

A partir de las coordenadas de 2 puntos conocidos (A y B), y la medición de 2 distancias (d_1 y d_2), se calculan las coordenadas del punto incógnita P. (Figura 4.5)

DATOS: X_A; Y_A X_B; Y_B MEDICIONES: d_1; d_2 RESULTADO: X_P; Y_P

Figura 4.5: Trilateración



En el triángulo APB, los ángulos internos son: α en A; β en B; γ en P

Por el teorema del Coseno → $d^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2 \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \cos\gamma$

$$\gamma = \arccos\left((d_1^2 + d_2^2 - d^2) / 2 \cdot d_1 \cdot d_2 \right)$$

Por el teorema del Seno → $d / \mathrm{sen}\, \gamma = d_2 / \mathrm{sen}\, \alpha \rightarrow \alpha = \mathrm{arc\,sen}\,(d_2/d \cdot \mathrm{sen}\, \gamma)$

$$Az_{AP} = Az_{AB} - \alpha$$

Finalmente, con Az_{AP} y d_1 se calculan las coordenadas de P:

$$\boxed{X_P = X_A + d_1 \cdot \cos Az_{AP}}$$

$$\boxed{Y_P = Y_A + d_1 \cdot \mathrm{sen}\, Az_{AP}}$$

Aplicación: es el método más sencillo cuando se dispone de un distanciómetro electrónico, y condiciones ambientales (tiempo, calor, visibilidad, etc.) favorables.

Métodos combinados

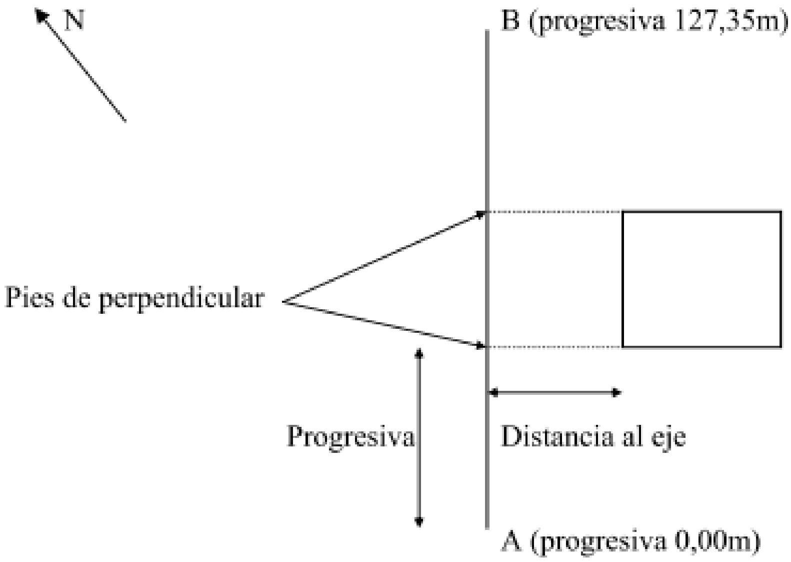
En estos métodos se miden tanto ángulos como distancias para la obtención de un conjunto de puntos. Se pueden clasificar en aquellos que usan ángulos rectos (fijos) y en los que miden los ángulos en cada vértice (poligonales).

Levantamiento por coordenadas rectangulares

Es aquel procedimiento, en el cual, a partir de una dirección determinada, con medición de distancias desde un origen y distancias ortogonales a esa dirección, se determinan las coordenadas de puntos incógnita (Figura 4.6).

Dada una dirección AB, considerada **eje de levantamiento**, se miden las distancias que existen desde los distintos puntos o detalles que se desean levantar al lado en cuestión. Como distancias desde un punto a una recta hay infinitas, la distancia que se toma es la menor que por geometría es la distancia tomada sobre la perpendicular al eje que pasa por el punto. Esa distancia es llamada distancia al eje. La distancia puede ser a la derecha o izquierda del lado, cuestión que queda clarificada con un croquis del levantamiento. Para terminar de definir la ubicación de un punto en cuestión, conocida su distancia al eje, queda definir la distancia que existe entre el pie de la perpendicular (punto intersección entre el eje de levantamiento y la perpendicular que pasa por el punto) y el origen de la progresiva. A esta distancia se la denomina **progresiva** del punto. Se emplean escuadras ópticas, las cuales se posicionan sobre el eje, en los pies de perpendicular.

Figura 4.6: Levantamiento por coordenadas rectangulares



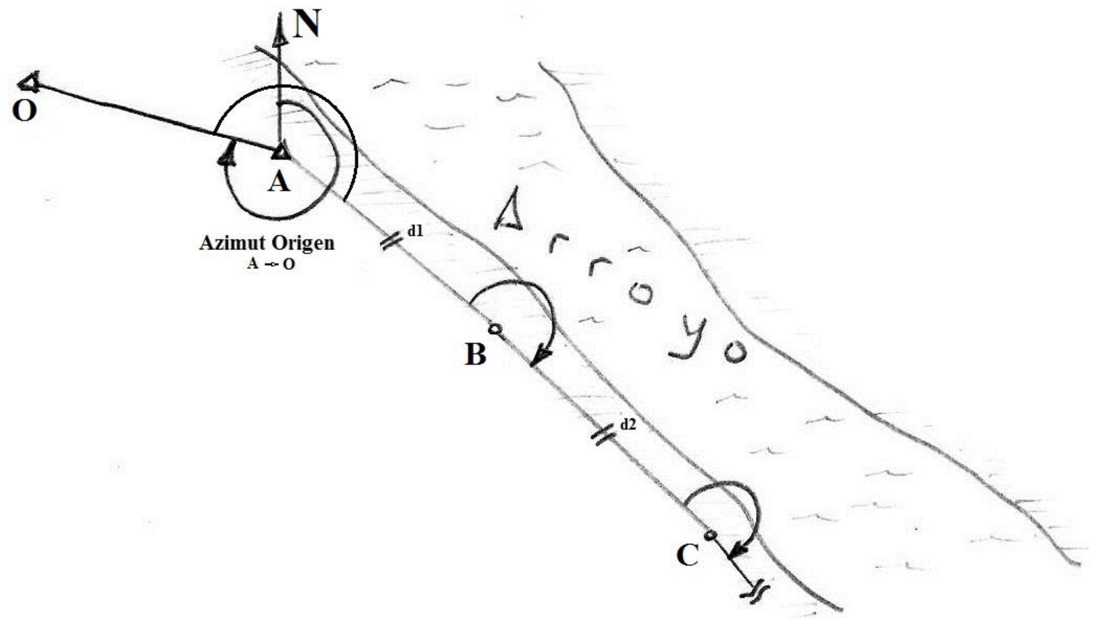
Poligonal

La Poligonal o Itinerario es un método adecuado para calcular las coordenadas de una serie de puntos ligados entre sí por una sucesión de ángulos y distancias medidas (di).

Requiere, para su cálculo, partir de las coordenadas planas (convencionales) de un punto conocido (X_A; Y_A) y un Azimut de Arranque u Origen (Az), o bien las coordenadas de 2 puntos (Base de arranque). En la Figura 4.7 la Base de Partida u Origen es la conformada por los puntos A y O.

Se aplica para mediciones de lotes, perímetros de parcelas forestales, redes de apoyo para levantamientos topográficos, levantamiento de puntos a lo largo de una línea de ribera, etc. (Figura 4.7).

Figura 4.7: Poligonal a lo largo de la ribera de un arroyo



Las coordenadas de los puntos B, C, etc. se calculan sucesivamente en cada vértice mediante las expresiones:

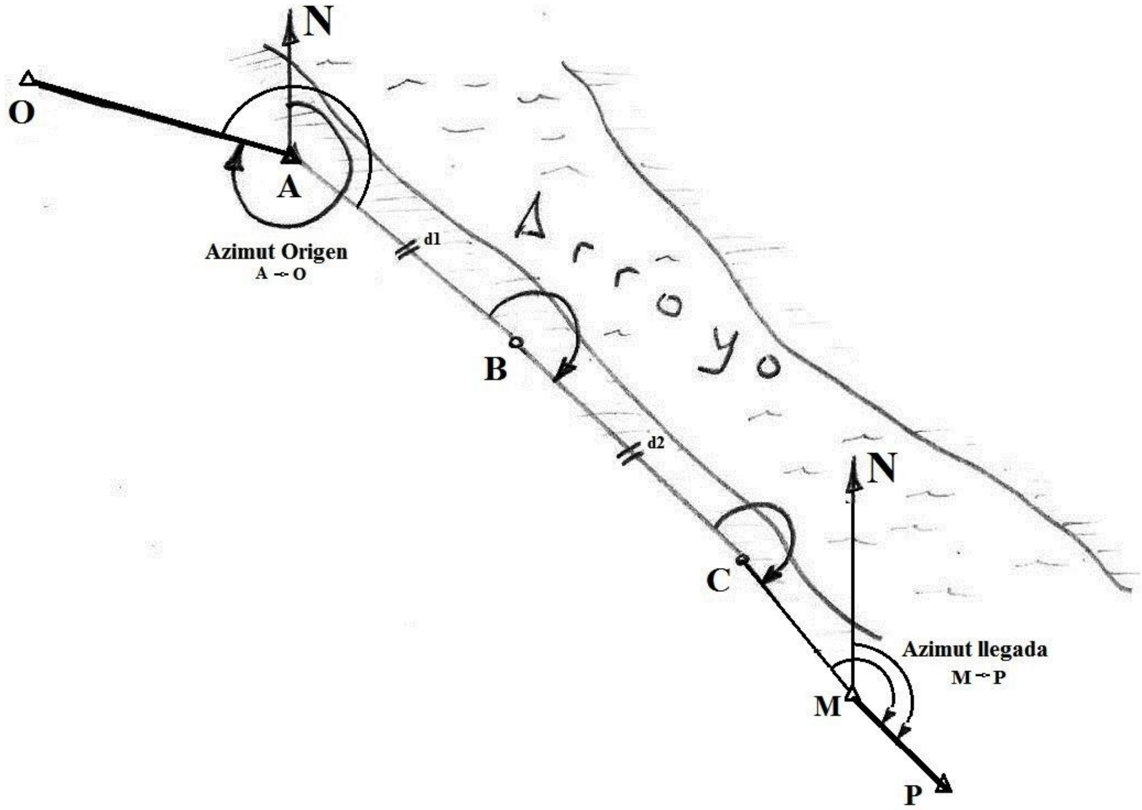
$X_B = X_A + d_1 * \cos Az$ y $Y_B = Y_A + d_1 * \text{sen } Az$

donde $Az = \text{arc tg } (\Delta Y/\Delta X)$ y d_1: distancia A-B

a su vez $\Delta X = X_B - X_A$ y $\Delta Y = Y_B - Y_A$

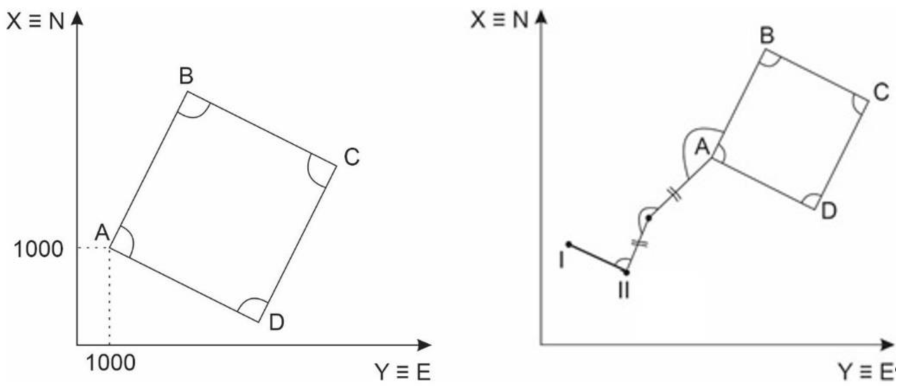
Este caso se trata de una **poligonal abierta geométricamente**, y sin posibilidad de comprobar errores de medición (**sin "cierre"**). Es decir, si la medición de alguno de los lados o ángulos estuviera afectada por un error grosero, no podría detectárselo. Tampoco pueden evaluarse los errores accidentales. Para poder compensar los errores accidentales, habría que "**cerrar la poligonal**", lo cual puede ejecutarse arribando al final de la misma a una "**base de llegada**", conformada por un par de puntos con coordenadas conocidas. Por ejemplo, los puntos M y P en la Figura 4.8, donde se presenta una poligonal abierta geométricamente, pero cerrada en cuanto a compensación de errores.

Figura 4.8: Poligonal con “cierre” en base MP



Si se define un **sistema de coordenadas local**, tanto las coordenadas de partida como el azimut de arranque se eligen con una disposición conveniente, procurando que la poligonal se desarrolle en el primer cuadrante de los ejes cartesianos (Figura 4.9). Si, en cambio, se debe referir el trabajo a un **sistema determinado** (por ejemplo, el *Gauss-Krueger*), se debe tener las coordenadas de por lo menos 2 puntos en dicho sistema y realizar su vinculación al polígono de estudio mediante una **poligonal de enlace.**

Figura 4.9: Sistema de referencia planimétrico

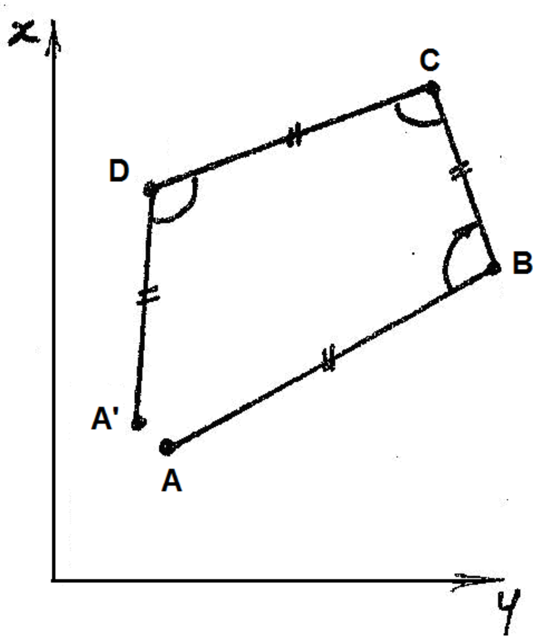


Poligonal compensada

En los casos anteriores se presentaron poligonales abiertas geométricamente. Ahora se verá el caso de polígonos cerrados (por ejemplo, el cuadrilátero ABCD), en los cuales se miden lados y ángulos, de manera de poder efectuar el cierre del polígono, o sea la compensación de los errores accidentales (Figura 4.10).

Aunque a campo se mide todo el perímetro cuidadosamente, al efectuar el cálculo de las coordenadas de los puntos, no se arriba a las mismas coordenadas de partida (del Pto. A). Esto se debe a que, al efectuar las mediciones angulares y lineales, se cometen errores accidentales, que se trasladan de punto en punto, llegando a coordenadas distintas (en el Pto. A') a las de partida (Figura 4.10).

Figura 4.10: Error de Cierre de la poligonal



La diferencia entre ambos puntos constituye el error de cierre, el cual, si es menor a la Tolerancia, se distribuye mediante el proceso de compensación.

Compensación

La compensación se realiza distribuyendo los errores accidentales, de modo de lograr el cierre del polígono.

Existen numerosos métodos para compensar poligonales. Aquí se trata uno sencillo, consistente en 2 compensaciones sucesivas: angular y lineal.

Compensación angular

Dado que es un polígono cerrado, se debe cumplir que la suma de ángulos internos $\Sigma\alpha_i$ sea igual a:

$$\Sigma\alpha_i = 180º. (n – 2)$$

Para un cuadrilátero → n = 4 por consiguiente: $\Sigma \alpha_i = 360º$

El **Error de Cierre Angular** resulta: **Eα** = $\Sigma \alpha_i$ - 360º

Y la **Tolerancia Angular Tα** = k. (n)$^{1/2}$

Donde k es un valor entre 15” y 1’, y n = número de vértices (o ángulos)

Se comparan Error y Tolerancia. Si **Eα < Tα** se procede a compensar. Si **Eα > Tα** se debe repetir parcial o totalmente el trabajo.

El **Eα** se distribuye equitativamente en todos los ángulos medidos. O sea, hay 4 ángulos, y corresponde una **Corrección Angular cα** = - E / n.

Compensación lineal

Dado que se trata de un polígono cerrado, al final del itinerario se llega al punto de partida, por lo cual la suma de los incrementos Δx y Δy debe ser cero. Eso difícilmente ocurre, y en general se produce un **Error de Cierre Lineal** o **Flecha de Error “f”.**

$$f = \sqrt{Ex^2 + Ey^2}$$

Donde Ex y Ey son las proyecciones de f sobre los ejes x e y respectivamente.

En este caso, un polígono cerrado, Ex y Ey se obtienen de la sumatoria de los incrementos en x y en y respectivamente.

El error f se compara con la **Tolerancia Lineal T_L** adoptada.

$$TL = \pm 0{,}015\sqrt{0{,}3 * P + 0{,}0005 * P^2}$$

Donde P es la suma de los lados (perímetro)

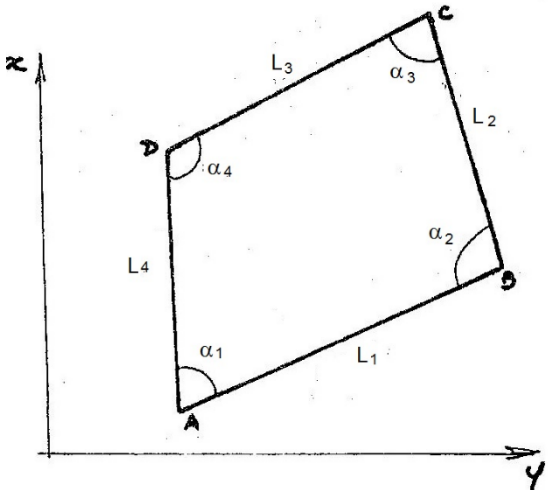
Si f < T_L se procede a calcular las correcciones a aplicar en los incrementos. En este método de compensación las correcciones (Cx y Cy) son proporcionales a las longitudes de los lados (L):

$$Cx = - (\sum\Delta x * Lado) / P$$
$$Cy = - (\sum\Delta y * Lado) / P$$

Cabe resaltar que las Correcciones, tanto angular (cα) como lineal (Cx y Cy), tienen signo inverso al del Error, que corrigen.

Finalmente, se corrigen los incrementos, y se verifica que se arribe a las coordenadas del mismo punto de partida.

Figura 4.11: Polígono compensado angular y linealmente



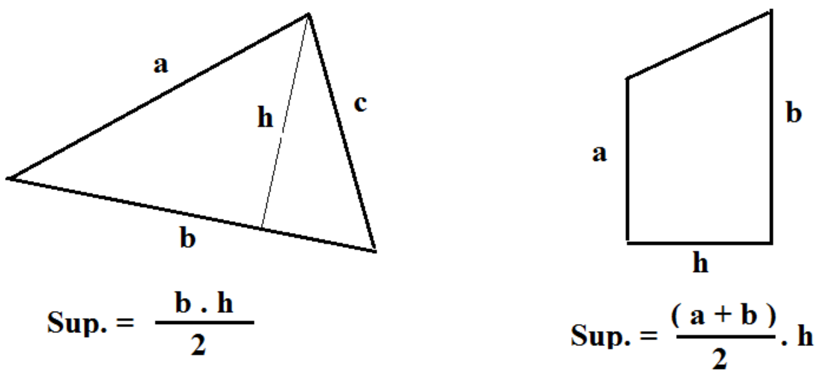
Cálculo y determinación de superficies

Superficie de polígonos

Descomposición en triángulos y trapecios

Consiste en descomponer el polígono en un conjunto de triángulos y/o trapecios, y luego sumar las áreas de los componentes. Las formulas básicas para el cálculo son (Figura 4.12):

Figura 4.12: Áreas de triángulos y trapecios



Las áreas de los triángulos también pueden calcularse a partir de la longitud de sus 3 lados por la Formula de Heron:

$$S = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$$

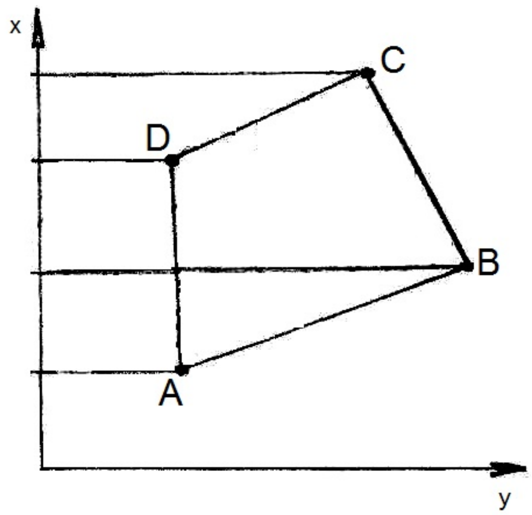
Donde p es el semiperímetro del triangulo

Método de los trapecios

El **Método de los Trapecios** se aplica para el cálculo de la superficie de un polígono, cuyos vértices tienen coordenadas conocidas.

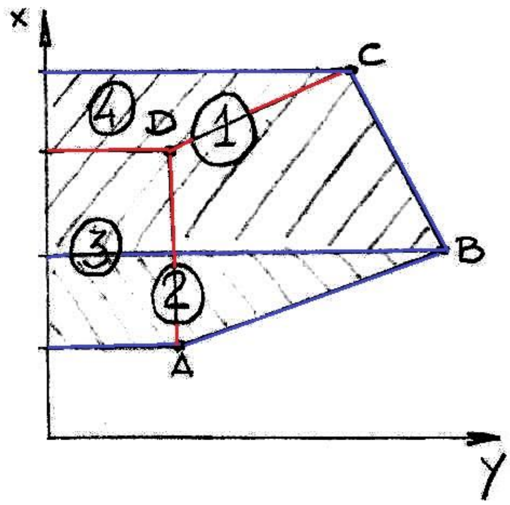
Consiste en reducir el polígono a una serie de trapecios, que se forman entre sus lados, los ejes y las rectas proyectantes de los vértices sobre dichos ejes. Por ejemplo, en la Figura 4.13 se presenta el polígono ABCD.

Figura 4.13: Polígono ABCD proyectado sobre eje de ordenadas "x"



Proyectando los vértices del polífono ABCD sobre el eje de ordenadas X, se distinguen 4 trapecios (1 al 4). La Superficie del polígono = suma de los trapecios **1+2** menos los trapecios **3+4**. (Figura 4.14)

Figura 4.14: Calculo del área del polígono en base a las proyecciones de sus vértices sobre los ejes cartesianos



La expresión general para la superficie del polígono ABCD es:

$Sx = [(Y_n + Y_{n+1}) * (X_{n+1} - X_n)] / 2$ o bien $Sy = [(X_n + X_{n+1}) * (Y_{n+1} - Y_n)] / 2$

Donde Sx es la superficie del trapecio, calculada en base a su proyección sobre el eje de ordenadas “x”, y Sy la respectiva calculada sobre la proyección sobre el eje “y”. Ambas deben ser iguales.

Superficie de áreas de límites curvos

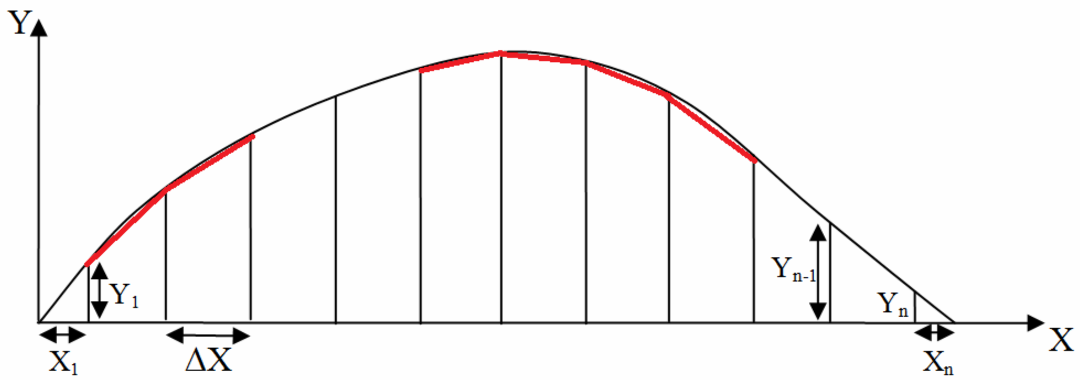
En el caso de superficies de bordes curvos, se puede calcular su área por distintos métodos, entre los cuales se presentan los de Bezout, Simpson y Poncelet.

Bezout

Se divide la proyección de la curva en intervalos (Δx). La intersección de la curva con las proyecciones, se unen mediante las cuerdas, siendo reemplazada la figura curva original por un polígono (de color rojo en Figura 4.15).

La suma del área de cada uno de los trapecios más los 2 triángulos de ambos extremos da el área total (S).

Figura 4.15: Superficie bajo la curva, aproximada por intervalos Δx



La superficie bajo la curva (S):

$$S = \frac{X_1.Y_1}{2} + \Delta X\,.\frac{Y_1 + Y_2}{2} + \Delta X\,.\frac{Y_2 + Y_3}{2} + \;....+ \Delta X\,.\frac{Y_{n-1} + Y_n}{2} + \frac{X_n.Y_n}{2}$$

Agrupando, y sacando factor común, queda:

$$S = \frac{X_1.Y_1 + X_n.Y_n}{2} + \Delta X\,.\left[\frac{Y_1 + Y_n}{2} + Y_2 + Y_3 + Y_4 + \ldots + Y_{n-1}\right]$$

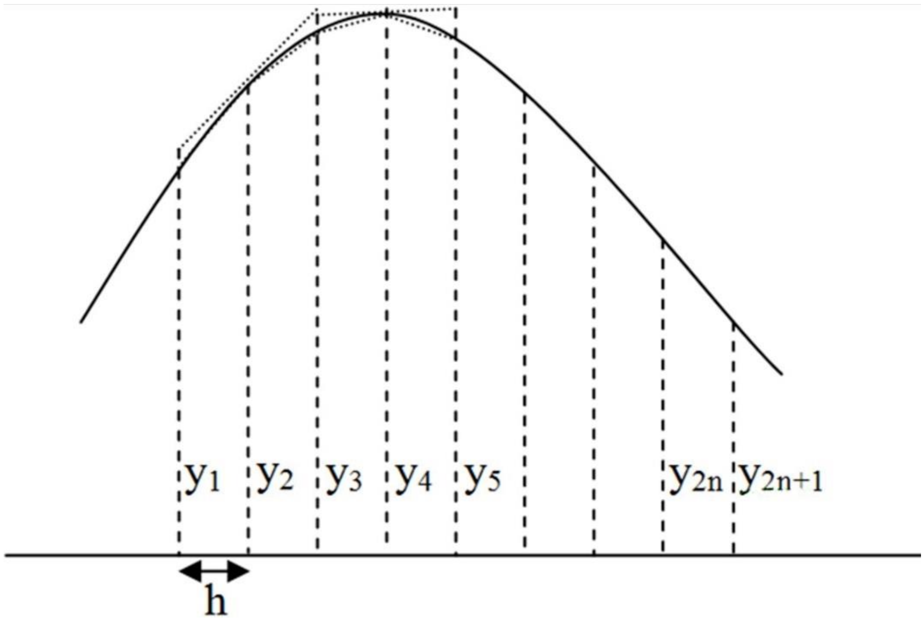
Dado que se consideran rectos los segmentos del borde de la superficie, el cálculo de S conduce a errores por defecto cuando la curva es convexa, y por exceso cuando es cóncava.

Simpson

Se divide la proyección de la curva en un número par de intervalos (h). La intersección de la curva con las proyecciones, se unen mediante las cuerdas (igual que con el método de Bezout).

La suma del área de cada uno de los trapecios da el área por defecto (para curvas convexas) “s” (Figura 4.16).

Figura 4.16: Curva real (negro), bajo las tangentes (azul) y bajo las cuerdas (rojo)



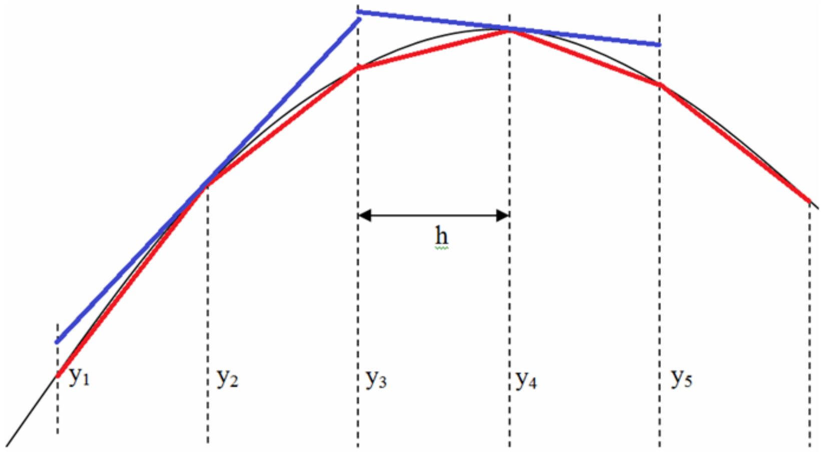
Se trazan las tangentes a la curva en los extremos de las ordenadas pares, y éstos son limitados por las prolongaciones de las ordenadas impares contiguas.

El área de estos trapecios sobreestima a la real en las curvas convexas (trapecios circunscriptos), y se la denomina “S”. El área real “A” será <“S” y >“s”.

Simpson considera que el valor más cercano al área real proviene de agregarle 1/3 de S-s al valor de “s”.

$$A = s + \frac{S - s}{3}$$

Figura 4.17: Detalle de trapecios circunscriptos (con tangentes) e interiores (con cuerdas)



El error “e” se puede acotar variando “h” por iteraciones → $e \leq \frac{2}{3}(S - s)$

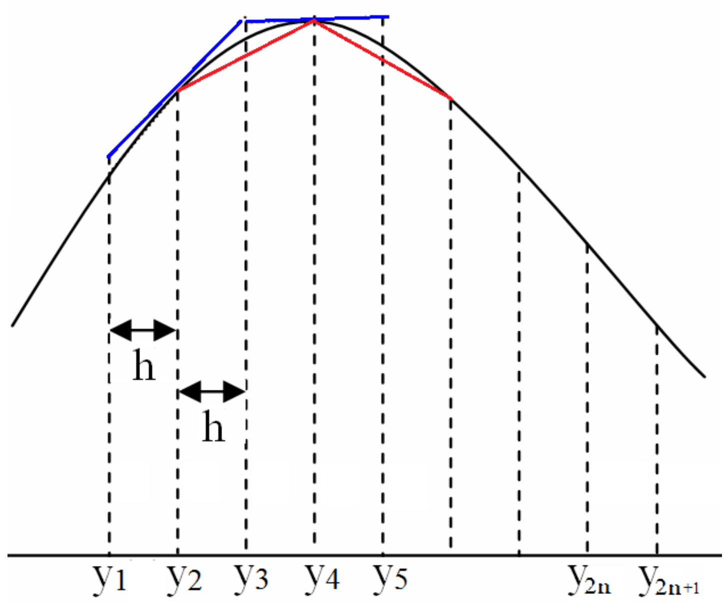
Poncelet

A igual que en el método de Simpson, el área es dividida en un número par de segmentos.

La superficie “S”, calculada por exceso, formada por trapecios, obtenidos por tangentes a las ordenadas pares y limitados por las prolongaciones de las ordenadas impares adyacentes (igual que en el método de Simpson).

La superficie por defecto “s” (trapecios inscriptos) se obtiene como la cuerda que une la intersección de la curva con las ordenadas adyacentes (para el primer y último trapecio) y por la cuerda que une las intersecciones de las pares para el resto de la superficie (Figura 4.18).

Figura 4.18: Tangentes y cuerdas en el método de Poncelet



El valor del área bajo la curva “A” se calcula como la media entre las dos superficies

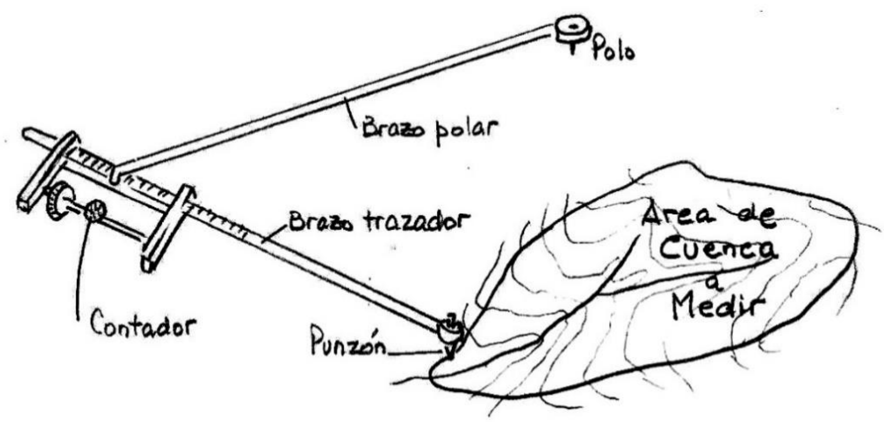
$$A = \frac{S + s}{2}$$

Superficies de contornos irregulares

La determinación de superficies es una actividad muy frecuente e importante para el Ingeniero Agrónomo o Forestal. Ya sea en el cálculo de áreas de masas boscosas, suelos, mapas de vegetación natural, cuencas hídricas, superficies dañadas de cultivos u hojas (área foliar), las superficies de contorno irregular pueden ser cuantificadas por métodos analógicos o analíticos.

El **planímetro polar** es un instrumento de gabinete (Figura 4.19), que permite, deslizando un punzón o lupa sobre el perímetro del área, obtener *analógicamente* la superficie.

Figura 19: Planímetro Polar



La operación es sencilla y requiere la lectura en rueditas graduadas, que están calibradas y correlacionadas con el área envuelta por el recorrido del punzón.

La precisión es del orden de 1 %.

También las superficies se pueden determinar analíticamente mediante **Planímetros digitales** (Figura 4.20a) o mediante **Tabletas o Mesas Digitalizadoras** (Figura 4.20b), que permiten alcanzar mayor precisión y la ventaja de operar con archivos digitales de puntos.

Figura 4.20: a) Planímetro a rodillos (Izq.) y b) Mesa Digitalizadora (Der.)